从狭义相对论到经典场论(三)：场的动力学

原创 朱庆祺(Vic Zhu) 中科院物理所 2023-03-31 20:31 发表于北京

> 作者：朱庆祺
>
> 学校：多伦多大学

本系列第一篇：从狭义相对论到经典场论(一)：起源和洛伦兹变换的导出
本系列第二篇：从狭义相对论到经典场论(二)：粒子的动力学

目录

- 经典场论系统的作用量原理，欧拉-拉格朗日方程，和哈密顿量
- 标量场的场方程和能量
- 向量场（电磁场）的场方程和能量
- 引力场的场方程

19 经典场论系统的作用量原理，欧拉-拉格朗日方程，和哈密顿量

上面讨论的都是粒子的行为，即粒子在一个固定背景场下的运动情形。接下来我们就讨论场本身的动力学行为。与之前处理的经典力学系统类似，经典场论系统可以看成是经典力学系统一个很自然的推广。其中**场**本身是此时系统的**广义坐标**，而**场对时空坐标的偏导数**则是此时系统的**广义速度**。场的动力学行为也是由它的作用量决定的。而场作用量的数学形式一样可以由一些基本的对称性原理，比如**洛伦兹不变性**，**规范不变性**等所确定。所以下面我们就使用类似于之前经典力学系统的处理手法，从作用量原理导出场的欧拉-拉格朗日方程，以及一个非常重要的不随时间变化的守恒量 — 场的哈密顿量/总能量。

场的作用量可以写成**拉格朗日量对时间的积分**，但考虑到场本身不仅是时间的函数，它还是三个空间坐标的函数，且依据狭义相对论的时空观它们必须占据相同的地位，所以我们可以进一步把场的作用量写成是**拉格朗日密度对四维时空坐标积分**的形式从而显式地表现出体系的洛伦兹对称性。其中拉格朗日密度是场本身（广义坐标）和场对时空坐标偏导数（广义速度）的函数：

$$S=\int \mathrm{d}tL=\int \mathrm{d}t\int \mathrm{d}^3x\mathcal{L}=\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}(\varphi,\partial\varphi)$$

依据作用量原理可知，经典场论系统的运动规律由作用量取极值给出。这在数学上对应着作用量的变分为0。应用多元函数微积分运算的基本法则，我们有：

$$0=\delta S=\int \mathrm{d}^4x\delta\mathcal{L}(\varphi,\partial\varphi)=\int \mathrm{d}^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta(\partial_\mu\varphi)\right]$$

对上式应用分部积分可以得到:

$$=\int \mathrm{d}^4x\left\{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\right]\delta\varphi+\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\varphi\right)\right\}$$

上面大括号表达式里的第二项是**边界/表面项**，它对整个积分值没有贡献。所以上式可以简化成:

$$=\int \mathrm{d}^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\right]\delta\varphi$$

因为$\delta\varphi$是可以任意变化的小量，所以为了使得上式为0，我们必须要求上式中括号里的表达式为0，即:

$$\Rightarrow\boxed{\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}}$$

这就是大名鼎鼎的**欧拉-拉格朗日方程**，它是作用量原理在经典场论系统中的体现！相应地，我们可以定义出相对于场 （广义坐标）的**共轭动量**是:

$$\Pi_\varphi\equiv\frac{\partial\mathcal{L}(\varphi,\partial\varphi)}{\partial\dot{\varphi}}$$

现在对于这个经典场论系统，我们已经有了它的拉格朗日密度，以及它的广义速度和共轭动量。通过它们我们可以利用对拉格朗日密度的**勒让德变换**定义出一个密度$\mathcal{H}$和相应的守恒量H，即:

$$\boxed{H=\int \mathrm{d}^3x\mathcal{H}\equiv\int \mathrm{d}^3x[\Pi_\varphi\dot{\varphi}-\mathcal{L}]=\int \mathrm{d}^3x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi}-\mathcal{L}\right]}$$

其中$\mathcal{H}$叫作场的**能量密度**，H叫作场的**哈密顿量/总能量**。为了验证按照此种方式定义出的哈密顿量H的确是个不随时间变化的守恒量，我们将上述方程两端同时对时间求导，然后应用微积分里函数乘积的求导法则和链式求导法则我们有:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\int \mathrm{d}^3x\left\{\partial_0\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right)\dot{\varphi}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\ddot{\varphi}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\dot{\varphi}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\mu\dot{\varphi}\right\}$$

对上式应用分部积分可以得到:

$$=\int \mathrm{d}^3x\left\{\partial_0\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right)\dot{\varphi}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\ddot{\varphi}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\dot{\varphi}+\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\dot{\varphi}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\dot{\varphi}\right)\right\}$$

通过把上面大括号表达式里的第四项用场的欧拉-拉格朗日方程的结果做替换，我们有:

$$=\int \mathrm{d}^3x\left\{\partial_0\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right)\dot{\varphi}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\ddot{\varphi}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\dot{\varphi}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\dot{\varphi}-\partial_0\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi}\right)-\partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)}\dot{\varphi}\right)\right\}$$

容易发现上式大括号里的前五项刚好全部抵消，所以我们可以将其大幅简化成如下形式:

$$= -\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} \dot{\varphi} \right) = -\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x \nabla \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla \varphi)} \dot{\varphi} \right]$$

利用向量微积分里高斯散度定理的基本知识，我们可以将上述体积分转化成无穷远边界上的面积分：

$$= -\oint_{\partial\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla \varphi)} \dot{\varphi} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$$

所以我们最终得到哈密顿量H对时间的导数是0。这也就证明了我们定义出的哈密顿量H确实不随时间发生变化，是这个经典场论系统的守恒量。它在物理上对应着场的**总能量**。

当然上面这些只是**形式理论**。为了让大家真正建立起一些**物理感觉**，我们下面不妨用该形式理论解决三个具体的例子，它们分别是标量场/向量场（电磁场）/引力场的动力学行为。通过这些具体例子的讲解，读者将会对该形式理论的内在逻辑有更深刻的理解。

20 标量场的场方程和能量

先考虑最简单的**不携带任何洛伦兹指标的标量场**情形（比如希格斯场）。我们首先构造该标量场系统的作用量。因为**作用量必须是洛伦兹变换下的不变量（即洛伦兹标量）才能自动保证最终得到的场的运动方程在洛伦兹变换下保持形式不变**，而我们最容易想到的两个洛伦兹不变量就是$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ 和$\mathcal{V}(\phi)$，它们分别对应场的动能项和势能项。又考虑到：1）希望该标量场论平行推广经典力学里谐振子系统的拉格朗日量；2）希望最终得出的场的运动方程是线性方程；3）场ϕ可以与一个标量外源j耦合；由此我们可以基本定出$\mathcal{V}(\phi)$的具体形式，并将标量场的作用量写成如下形式：

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) = \int \mathrm{d}^4 x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - j\phi \right)$$

现在有了上述标量场作用量的具体形式后，我们容易从中提取出它的拉格朗日密度。将该拉格朗日密度代入由作用量原理导出的场的**欧拉-拉格朗日方程**我们有：

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = \partial_\mu (\partial^\mu \phi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi - j$$

化简整理后得到四维协变形式的标量场的运动方程是：

$$\boxed{(\partial^2 + m^2)\phi = (\Box + m^2)\phi = -j}$$

这就是大名鼎鼎的**克莱因-高登方程**！历史上这个方程最初是从相对论性量子力学的角度提出的。但我们这里完全是从经典场论的角度把它导出的，所以到此为止它还只是个经典场的运动方程，与量子力学还没有任何关系。数学上来看，这个克莱因-高登方程是个二阶波动方程，且我们可以从上述张量方程的数学形式立刻看出它具备洛伦兹协变性！这也验证了我们在本节开头时说过的话：“**作用量必须是洛伦兹变换下的不变量（即洛伦兹标量）才能自动保证最终得到的场的运动方程在洛伦兹变换下保持形式不变。**”

当然，上述用四维张量语言表述的克莱因-高登方程也可以写成如下大家更为熟悉的三维语言下波动方程的形式：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\nabla^2\phi+m^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+m^2\phi=-j$$

现在有了标量场的运动方程，接下来我们就来看看它的哈密顿量/总能量是什么样的。我们首先将四维协变形式的标量场的拉格朗日密度显式地写成：

$$\mathcal{L}(\phi,\partial\phi)=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{m^2}{2}\phi^2-j\phi=\frac{\dot{\phi}^2}{2}-\frac{|\nabla\phi|^2}{2}-\frac{m^2}{2}\phi^2-j\phi$$

有了上述拉格朗日密度的具体形式，接下来我们就利用之前在形式理论里共轭动量的定义式计算出相对于标量场ϕ（广义坐标）的共轭动量是：

$$\Pi_\phi\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}=\dot{\phi}$$

最后利用之前在形式理论里**场的能量密度和哈密顿量/总能量的定义式**，通过对场的拉格朗日密度做**勒让德变换**便可以得到它的能量密度和相应的总能量表达式是：

$$H=\int\mathrm{d}^3x\left[\Pi_\phi\dot{\phi}-\mathcal{L}\right]=\int\mathrm{d}^3x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\dot{\phi}-\mathcal{L}\right]$$

代入场的共轭动量和标量场的拉格朗日密度表达式可以得到：

$$=\int\mathrm{d}^3x\left[\dot{\phi}^2-\frac{\dot{\phi}^2}{2}+\frac{|\nabla\phi|^2}{2}+\frac{m^2}{2}\phi^2+j\phi\right]$$

$$=\int\mathrm{d}^3x\left[\frac{\dot{\phi}^2}{2}+\frac{|\nabla\phi|^2}{2}+\frac{m^2}{2}\phi^2+j\phi\right]$$

当外源j=0时，我们可以从上式中提取出标量场ϕ本身的能量密度是：

$$\boxed{\mathcal{H}(j=0)=\frac{\dot{\phi}^2}{2}+\frac{|\nabla\phi|^2}{2}+\frac{m^2}{2}\phi^2\geq 0}$$

容易发现，这个能量密度就是**经典力学里谐振子的哈密顿量在经典标量场论中的平行推广**。而且可以看出，因为上式是三个平方项相加，所以标量场ϕ本身的能量密度永远非负。这也与我们的物理直觉完全相符。

3 向量场（电磁场）的场方程和能量

在上一节中我们讨论的是标量场的运动方程和能量。标量场是一类最简单的不携带任何洛伦兹指标的场。在这一节中，我们将把标量场换成稍微复杂一点的**只携带有一个洛伦兹指标的向量场**。而一类最典型的向量场的例子就是电磁场，所以我们接下来就着重讨论向量/电磁场的运动方程和能量。我们首先构造该电磁场系统的作用量。因为**作用量必须是洛伦兹变换下的不变量（即洛**

伦兹标量）才能自动保证最终得到的场的运动方程在洛伦兹变换下保持形式不变，而我们最容易想到的四个洛伦兹不变量就是F_μ^μ，$A_\mu A^\mu$，$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$，和$j^\mu A_\mu$。其中j^μ是与电磁势耦合的矢量外源，即**4-电流密度**。它基本是由电荷密度和电流密度所构成的4-矢量，且满足标准的**连续性方程/流守恒方程**，即：

$$j^\mu \equiv (\rho, \mathbf{J})$$
$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

容易发现，在上述构造的四个洛伦兹不变量里，因为$F_\mu^\mu = 0$（即F_ν^μ的迹恒为0），所以作用量里只能是A_μ^μ，$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$和$j^\mu A_\mu$的线性组合，其中后两项分别对应电磁场的**动能项**以及电磁场与4-电流密度耦合所产生的**势能项**。又考虑到电磁场作用量必须具备**规范不变性**，所以我们必须舍去$A_\mu A^\mu$这一项。为了说明这一点，不妨考虑$A_\mu A^\mu$所对应的作用量在电磁势A_μ做了一个$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$规范变换以后的变化量：

$$\Delta S \propto \int \mathrm{d}^4 x [A^\mu \partial_\mu \Lambda + A_\mu \partial^\mu \Lambda + (\partial_\mu \Lambda)(\partial^\mu \Lambda)] \neq \mathrm{const}$$

可以发现该变化量非零（也不是常数），所以为了保持电磁场体系的规范不变性我们必须在作用量里舍去$A_\mu A^\mu$这一项。同时为了使得最终得出的电磁场场方程是线性方程，我们可以将电磁场的作用量写成如下形式：

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \mathcal{L}(A^\mu, \partial A^\mu) = \int \mathrm{d}^4 x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \right)$$

其中上述作用量里$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$前的系数取成(-1/4)的原因是为了使得之后导出的电磁场的场方程和能量密度是我们已经熟悉的经典电磁学里的形式，这一点将在后续的计算中得以展现。同时值得注意的是，上述**规范不变性**的要求其实对体系作用量的具体形式给出了非常严格的限制。它要求在对电磁势A_μ做如下的规范变换，即：

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$$

以后，体系的作用量不发生改变（或者最多相差一个常数）。其中Λ是任意的可微函数。所以我们下面就来审视一下我们之前写出的电磁场作用量是否的确满足规范不变性的要求。我们先来审视电磁场作用量第一项里的电磁场场强张量$F_{\mu\nu}$：

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

当我们对其中的电磁势A_μ做了规范变换以后，电磁场场强张量将变成：

$$\to F'_{\mu\nu} = \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \Lambda) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \Lambda)$$

化简整理后可以得到：

$$= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda$$
$$= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

所以我们发现**电磁场场强张量（电场/磁场的各个分量）在规范变换下并未发生改变**，也就是说它具备规范不变性。所以很自然地，电磁场作用量里的第一项，即动能项，确实具备规范不变

性。也许有些读者对上述以四维语言表述的规范变换还不太熟悉，所以下面我们再等价地用三维语言把上述规范变换的操作说明一下。在三维语言下电势和磁矢势的规范变换可以分别写成：

$$\begin{cases}\varphi \rightarrow \varphi + \dfrac{\partial \Lambda}{\partial t} \\ \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \nabla \Lambda\end{cases}$$

其中Λ是任意的可微函数。因为三维语言下电场和磁场的定义式是：

$$\begin{cases}\mathbf{E} \equiv -\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \\ \mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}\end{cases}$$

所以当我们对上述定义式中的电势和磁矢势做了规范变换以后，相应的电场和磁场将变成：

$$\begin{cases}\mathbf{E}' = -\dfrac{\partial(\mathbf{A} - \nabla \Lambda)}{\partial t} - \nabla\left(\varphi + \dfrac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi = \mathbf{E} \\ \mathbf{B}' = \nabla \times (\mathbf{A} - \nabla \Lambda) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}\end{cases}$$

所以我们这就在三维语言下显式地证明了**电场和磁场的各个分量在规范变换下不发生改变**，也就是具备所谓的规范不变性。所以相应的电磁场场强张量和由它构造出的电磁场作用量里的第一项，即动能项，均具备规范不变性。可以发现，这确实和我们之前用四维语言论证的结果完全一致！

接下来我们就来审视一下电磁场作用量里的第二项是否具备规范不变性。当我们对其中的电磁势A_μ做了规范变换以后，体系作用量的变化是：

$$\Delta S = -\int \mathrm{d}^4 x j^\mu \partial_\mu \Lambda = -\int \mathrm{d}^4 x \partial_\mu (j^\mu \Lambda) + \int \mathrm{d}^4 x (\partial_\mu j^\mu) \Lambda = 0$$

值得注意的是，我们在上述推导中使用了微积分里分部积分的技巧。其中分部积分后的第一项是**边界/表面项**，它对整个积分值没有贡献；分部积分后的第二项也对整个积分值没有贡献，因为我们最开始已经假定了4-电流密度满足标准的连续性方程/流守恒方程，即满足：

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

所以最后我们发现在规范变换下电磁场作用量的变化量是0。因为体系的经典运动方程是由作用量的变分取极值给出的，所以作用量不变自然意味着体系的运动方程也不会发生变化。所以这样我们就证明了**电磁场作用量和相应的运动方程均具备规范不变性**。现在有了电磁场作用量的具体形式后，我们容易从中提取出它的拉格朗日密度。将该拉格朗日密度代入由作用量原理导出的场的**欧拉-拉格朗日方程**，并利用微积分里的链式求导法则，我们有：

$$\begin{aligned}&\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)}\right) = \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\lambda\sigma}} \frac{\partial F_{\lambda\sigma}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = -j^\alpha \\ \Rightarrow\ &\partial_\mu\left(-\frac{1}{2} F^{\lambda\sigma}\left(\delta^\mu_\lambda \delta^\alpha_\sigma - \delta^\alpha_\lambda \delta^\mu_\sigma\right)\right) = \partial_\mu\left(-\frac{1}{2}\left(F^{\mu\alpha} - F^{\alpha\mu}\right)\right) = -j^\alpha\end{aligned}$$

化简整理后得到四维协变形式的电磁场的运动方程是：

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu\alpha} = j^\alpha}$$

这就是**用四维张量语言表述的经典电磁学里大名鼎鼎的麦克斯韦方程组中带源的两个方程**！（注意：我们之后将会看到，麦克斯韦方程组中剩余的两个方程只是由电场/磁场的定义式所自然导致的数学上的恒等式 — “**Bianchi恒等式**”。）但不同于历史上麦克斯韦方程组和相关电磁学定律的得出在很大程度上是来源于实验观测的，我们这里完全是从经典场论的角度把它导出的。除此之外我们可以从这里麦克斯韦方程的张量表述形式立刻看出它具备洛伦兹协变性！这也验证了我们原先说过的话：“**作用量必须是洛伦兹变换下的不变量（即洛伦兹标量）才能自动保证最终得到的场的运动方程在洛伦兹变换下保持形式不变。**”

上述电磁场的场方程是由电磁场场强张量$F^{\mu\nu}$表示的。当然，我们也可以用电磁势A^{μ}来表述上述场方程。将电磁场场强张量$F^{\mu\nu}$的定义式代入上述张量形式的麦克斯韦方程我们有：

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\alpha - \partial^\alpha A^\mu) = \Box A^\alpha - \partial^\alpha(\partial_\mu A^\mu) = j^\alpha$$

由于电磁势A^{μ}存在规范自由度，所以我们可以通过**选定一个特殊的规范**来把这个冗余的自由度给固定下来。同时，我们希望此处选取的规范满足洛伦兹不变性以适配场方程本身的洛伦兹对称性。所以我们可以对A^{μ}选定如下所示的**洛伦兹规范**，即：

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial A^x}{\partial x} + \frac{\partial A^y}{\partial y} + \frac{\partial A^z}{\partial z} = 0$$

这样一来，在选定洛伦兹规范下，上述关于A^{μ}的场方程就可以大幅简化成如下标准的波动方程的形式：

$$\boxed{\Box A^\alpha = j^\alpha, (\text{pick} : \partial_\mu A^\mu = 0)}$$

当然，上述用四维张量语言表述的关于A^{μ}的波动方程也可以写成如下大家更为熟悉的在经典电磁学里经常使用的三维语言下波动方程的形式：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \rho \\ \dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} = \mathbf{J} \end{cases}$$

回到之前用电磁场场强张量$F^{\mu\nu}$表示的四维张量形式的麦克斯韦方程。也许刚才大家对这种以四维张量形式呈现出来的麦克斯韦方程还有些陌生，但是我们可以在三维语言下通过恰当的对应把它写成大家更为熟悉的微分形式的麦克斯韦方程组中带源的两个方程，即：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

由于之前四维协变形式的麦克斯韦方程本质上是四个分量方程。为简单起见，我们首先考虑场方程的0分量（时间分量），即：

$$\begin{gathered} \partial_\mu F^{\mu 0} = j^0 = \rho \\ \Rightarrow \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \rho \end{gathered}$$

上面出现的逆变电磁场场强张量本质上就是由电场和磁场的各个分量组成的。它的矩阵形式是：

$$F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0\end{pmatrix}$$

所以通过上述矩阵，我们容易将逆变电磁场场强张量的分量与电场/磁场各个分量作出恰当的对应。做完这个对应后，场方程的0分量就变成了：

$$\Rightarrow \partial_x E^x+\partial_y E^y+\partial_z E^z=\rho$$

注意到方程左端恰好对应电场的散度，于是上述方程可以用矢量及矢量运算写成如下更为紧凑的形式：

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho}$$

所以我们从场方程的0分量成功地导出了麦克斯韦方程组中第一条被称作"电场高斯定律"的方程！

接下来我们考虑场方程的空间分量。为简单起见，我们不妨先讨论场方程的x分量，即：

$$\begin{gathered}\partial_\mu F^{\mu 1}=j^1=J^x \\ \Rightarrow \partial_0 F^{01}+\partial_2 F^{21}+\partial_3 F^{31}=J^x\end{gathered}$$

根据之前写出的逆变电磁场场强张量的矩阵形式，我们容易将其与电场/磁场各个分量作出恰当的对应。做完这个对应后，场方程的x分量就变成了：

$$\Rightarrow -\partial_t E^x+\partial_y B^z-\partial_z B^y=J^x$$

注意到方程左手边的第二项和第三项刚好可以组合成磁场旋度的x分量，所以我们有：

$$\Rightarrow \left[-\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+(\nabla\times\mathbf{B})\right]^x=J^x$$

当然上面得出的只是场方程的x分量。我们可以利用完全相同的处理手法得出场方程的y分量和z分量，且它们可以被统一成如下更为紧凑的矢量方程的形式：

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\times\mathbf{B}=\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}}$$

所以我们从场方程的空间分量成功地导出了麦克斯韦方程组中第二条被称作"安培-麦克斯韦定律"的方程！其中该方程右手边的第二项$\partial\mathbf{E}/\partial t$叫作"**位移电流**"，历史上麦克斯韦第一次把它引入的动机是为了使该方程与连续性方程/流守恒方程在数学上自洽。

剩余两个麦克斯韦方程直接来源于电磁场场强张量（即电场/磁场）的定义式，即：

$$\begin{gathered}F_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \\ \Rightarrow\begin{cases}\mathbf{E}\equiv-\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla A^0=-\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\varphi \\ \mathbf{B}\equiv\nabla\times\mathbf{A}\end{cases}\end{gathered}$$

该定义式会很自然地导致一个数学上的恒等式，叫作"**Bianchi恒等式**"，即：

$$\boxed{\partial_\mu F_{\lambda\sigma}+\partial_\lambda F_{\sigma\mu}+\partial_\sigma F_{\mu\lambda}=0}$$

通过把之前写出的电磁场场强张量$F_{\mu\nu}$的定义式代入Bianchi恒等式，我们容易发现Bianchi恒等式是自动成立的：

$$\partial_\mu(\partial_\lambda A_\sigma-\partial_\sigma A_\lambda)+\partial_\lambda(\partial_\sigma A_\mu-\partial_\mu A_\sigma)+\partial_\sigma(\partial_\mu A_\lambda-\partial_\lambda A_\mu)=0$$

也许刚才大家对这种以四维张量形式呈现出来的Bianchi恒等式还有些陌生，但是我们可以在三维语言下通过恰当的对应把它写成大家更为熟悉的微分形式的麦克斯韦方程组中剩余两个不带源的方程，即：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\mathbf{B}=0\\ \nabla\times\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\end{cases}$$

我们首先考虑Bianchi恒等式的下标取$(\mu=1,\lambda=2,\sigma=3)$的情形，即：

$$\partial_1F_{23}+\partial_2F_{31}+\partial_3F_{12}=0$$

上面出现的协变电磁场场强张量本质上就是由电场和磁场的各个分量组成的。它的矩阵形式是：

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & E^x & E^y & E^z\\ -E^x & 0 & -B^z & B^y\\ -E^y & B^z & 0 & -B^x\\ -E^z & -B^y & B^x & 0\end{pmatrix}$$

所以通过上述矩阵，我们容易将协变电磁场场强张量的分量与电场/磁场各个分量作出恰当的对应。做完这个对应后，上面的Bianchi恒等式就变成了：

$$\Rightarrow\partial_x(-B^x)+\partial_y(-B^y)+\partial_z(-B^z)=0$$

注意到方程左端恰好对应负的磁场散度，于是上述方程可以用矢量及矢量运算写成如下更为紧凑的形式：

$$\Rightarrow\boxed{\nabla\cdot\mathbf{B}=0}$$

所以我们成功地从Bianchi恒等式导出了麦克斯韦方程组中第三条被称作“磁场高斯定律”的方程！

接下来我们考虑Bianchi恒等式的下标取$(\mu=0,\lambda=1,\sigma=2)$的情形，即：

$$\partial_0F_{12}+\partial_1F_{20}+\partial_2F_{01}=0$$

根据之前写出的协变电磁场场强张量的矩阵形式，我们容易将其与电场/磁场各个分量作出恰当的对应。做完这个对应后，上面的Bianchi恒等式就变成了：

$$\Rightarrow\partial_t(-B^z)+\partial_x(-E^y)+\partial_yE^x=0$$

注意到方程左手边的第二项和第三项刚好可以组合成电场旋度的z分量，所以我们有：

$$\Rightarrow\partial_xE^y-\partial_yE^x=(\nabla\times\mathbf{E})^z=-\left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)^z$$

当然上面得出的只是场方程的z分量。我们可以利用完全相同的处理手法得出场方程的x分量和y分量，且它们可以被统一成如下更为紧凑的矢量方程的形式：

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}$$

所以我们成功地从Bianchi恒等式导出了麦克斯韦方程组中第四条被称作“法拉第电磁感应定律”的方程！

现在有了电磁场的场方程，即麦克斯韦方程组，接下来我们就来看看它的**哈密顿量/总能量**是什么样的。利用之前写出的逆变电磁场场强张量（即电场/磁场各个分量）的矩阵形式，即：

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}$$

我们首先将四维协变形式的电磁场的拉格朗日密度显式地写成：

$$\mathcal{L}(A^\mu, \partial A^\mu) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu = \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2}{2} - \rho\varphi + \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}$$

有了上述拉格朗日密度的具体形式，接下来我们就利用之前在形式理论里共轭动量的定义式，并应用微积分里的链式求导法则计算出相对于电磁势A_μ（广义坐标）的共轭动量是：

$$\Pi_{A_\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \left(\delta_\alpha^0 \delta_\beta^\mu - \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^0 \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(F^{0\mu} - F^{\mu 0} \right) = -F^{0\mu} = F^{\mu 0}$$

最后利用之前在形式理论里场的能量密度和哈密顿量/总能量的定义式，通过对场的拉格朗日密度做**勒让德变换**便可以得到它的能量密度和相应的总能量表达式：

$$H = \int \mathrm{d}^3x \left[\Pi_{A_\mu} \dot{A}_\mu - \mathcal{L} \right] = \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} \dot{A}_\mu - \mathcal{L} \right]$$

代入场的共轭动量和电磁场的拉格朗日密度表达式可以得到：

$$= \int \mathrm{d}^3x \left[F^{i0} \dot{A}_i - \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2}{2} + \rho\varphi - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \right]$$

其中上式中括号里的第一项可以根据之前写出的逆变电磁场场强张量的矩阵形式以及电场的定义式进行改写。改写过后电磁场的总能量是：

$$= \int \mathrm{d}^3x \left[E^i \left(E^i + \partial_i \varphi \right) - \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2}{2} + \rho\varphi - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \right]$$

对上式应用分部积分可以得到：

$$
= \int d^3x \left[\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2} + \rho\varphi - \mathbf{J}\cdot\mathbf{A} \right] + \int d^3x \partial_i \left(E^i \varphi \right) - \int d^3x \left(\partial_i E^i \right) \varphi
$$

$$
= \int d^3x \left[\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2} + \rho\varphi - \mathbf{J}\cdot\mathbf{A} \right] + \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \nabla \cdot (\mathbf{E}\varphi) - \int d^3x (\nabla\cdot\mathbf{E})\varphi
$$

可以发现，对上述方程中间的体积分可以利用向量微积分里高斯散度定理的基本知识转化成**无穷远边界上的面积分**；对上述方程最右边的积分式应用之前得出的"电场高斯定律"可以发现其刚好与第一个积分式中括号里的第二项相抵消。于是方程可以被大幅简化成如下形式：

$$
= \int d^3x \left[\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2} - \mathbf{J}\cdot\mathbf{A} \right] + \oint_{\partial\mathbb{R}^3} \mathbf{E}\varphi \cdot d\mathbf{S}
$$

$$
= \int d^3x \left[\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2} - \mathbf{J}\cdot\mathbf{A} \right]
$$

当电流密度（外源）$\mathbf{J} = 0$时，我们可以从上式中提取出电磁场本身的能量密度是：

$$
\boxed{\mathcal{H}(\mathbf{J} = 0) = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2} \geq 0}
$$

容易发现，这个能量密度的表达式就是我们非常熟悉的经典电磁学里的能量密度形式。而且可以看出，因为上式是两个平方项相加，所以电磁场本身的能量密度永远非负。这也与我们的物理直觉完全相符。

4 引力场的场方程

在上一节中我们讨论的是向量/电磁场的场方程和能量。电磁场是只携带有一个洛伦兹指标的向量场。在这一节中，我们将把向量场换成更复杂的**携带有两个指标的二阶张量场**。而一类最典型的二阶张量场的例子就是引力场。所以我们接下来就讨论最简单的无源引力场的场方程。【注：由于引力场并不是我们这篇文章要讨论的重点，所以我们在这里只是给大家提供一个大致的思路。】我们首先构造无源引力场系统的作用量。因为在广义相对论里**作用量必须是广义坐标变换下的不变量（标量）才能自动保证最终得到的场的运动方程在广义坐标变换下保持形式不变**，即满足所谓的**广义协变性原理**。由于引力场是由时空背景舞台本身的内禀弯曲所导致的纯几何效应，而这个内禀弯曲可以由广义坐标变换下协变的**黎曼张量**来描述，所以我们可以尝试利用这个已知的具备广义协变性的黎曼张量去构造广义坐标变换下不变的标量。而我们最容易构造出的广义坐标变换下的不变量就是时空的曲率标量R（里奇标量），它是黎曼张量二次缩并后的结果，或者里奇张量缩并一次后的结果，即：

$$
\mathrm{RicciTensor}: R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}
$$

$$
\mathrm{RicciScalar}: R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}
$$

同时考虑到四维弯曲时空中广义坐标变换下不变的体积元是：

$$
d^4x \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} \equiv d^4x \sqrt{-g}
$$

所以我们可以将无源引力场的作用量写成如下形式：

$$S_{\mathrm{EH}}[g_{\mu\nu}] = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{EH}} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}R$$

这就是著名的**爱因斯坦-希尔伯特作用量**！现在有了上述无源引力场作用量的具体形式后，我们可以将其代入由作用量原理导出的场的**欧拉-拉格朗日方程**。经过化简整理后我们有：

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0}$$

这就是大名鼎鼎的广义相对论里无源引力场所满足的**真空爱因斯坦场方程**！它本质上是一个由10个互相耦合的高度非线性的方程所构成的方程组。除此之外我们可以从这里爱因斯坦场方程的张量表述形式立刻看出它具备广义坐标变换下的协变性。这也验证了我们在本节开头时说过的话："**在广义相对论里作用量必须是广义坐标变换下的不变量（标量）才能自动保证最终得到的场的运动方程在广义坐标变换下保持形式不变，即满足所谓的广义协变性原理。**"

未完待续……