张量分析简介

区艺锋

由于在不同的书中，张量分析的内容各有不同，这样不方便对基本公式进行记忆。因此这篇笔记意在整理基本的张量分析知识，但并不深入介绍，只是便于使用时参考。详细的内容可以阅读参考书目。

1 张量分析

1.1 爱因斯坦求和约定、缩并

在这篇笔记中，我们采用**爱因斯坦求和约定**：在式子中若有一个上标和一个下标是相同的，则它们构成一对重复指标[1]，默认对重复指标求和。由于重复指标被求和了，所以它们在式子中并不实际发挥作用，故我们常常把重复指标称为哑标。

在张量分析中，这种对重复指标求和的运算称为**缩并**。缩并可以发生在两个张量的一对上下标之间，也可以发生在一个张量内的一对上下标之间[2]。如，(1) 式和 (2) 式的运算皆称为缩并。

$$A^{\mu\nu\lambda}_{\mu\beta} = C^{\nu\lambda}_{\beta} \tag{1}$$

$$A^{\mu\nu}_{\alpha} B^{\lambda}_{\mu} = C^{\nu\lambda}_{\alpha} \tag{2}$$

1.2 仿射空间中的坐标变换

现在我们所进行的张量分析，都是在仿射空间中进行的。简单来说，所谓仿射是指线性，如果矢量的线性叠加仍是此空间的矢量，这个空间就称为仿射空间。仿射空间的严格定义在此并不重要，所以不去深究，只需清楚张量分析在仿射空间中进行即可。

设四维仿射空间中，联系两组**坐标** x'^{μ} 和 x^{ν} 的坐标变换为

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu}) \quad \mu,\nu = 0,1,2,3 \tag{3}$$

函数关系 (3) 式可能非常复杂，不过我们总可以写出坐标微分的变换公式

$$\mathrm{d}x'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \mathrm{d}x^{\alpha} \tag{4}$$

[1]重复指标由一个上标和一个下标组成，而不能由两个相同的上标，或两个相同的下标组成。

[2]“缩并可以发生在两个张量的一对上下标之间，也可以发生在一个张量内的一对上下标之间”这样的说法并没有在哪本书中说过，不同的书对缩并的说法不同，这句话是我对他们说法的综合。

1.3 张量的定义

1.3.1 零阶张量的定义

零阶张量（标量）U 定义为，在坐标变换下不变的量。即

$$U^{'} = U \tag{5}$$

1.3.2 逆变张量的定义

一阶逆变张量（逆变矢量）V^{μ} 定义为，在坐标变换下像坐标微分一样变换的量。即

$$V^{'\mu} = \frac{\partial x^{'\mu}}{\partial x^{\alpha}} V^{\alpha} \tag{6}$$

二阶逆变张量 $T^{\mu\nu}$ 定义为，在坐标变换下按 (7) 式变换的量。

$$T^{'\mu\nu} = \frac{\partial x^{'\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{'\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta} \tag{7}$$

而 n 阶逆变张量 $T^{\mu\nu\ldots\lambda}$ 则定义为在坐标变换下按 (8) 式变换的量。

$$T^{'\mu\nu\ldots\lambda} = \frac{\partial x^{'\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{'\nu}}{\partial x^{\beta}} \cdots \frac{\partial x^{'\lambda}}{\partial x^{\sigma}} T^{\alpha\beta\ldots\sigma} \tag{8}$$

1.3.3 协变张量的定义

n 阶协变张量 $T_{\mu\nu\ldots\lambda}$ 定义为在坐标变换下按 (9) 式变换的量。

$$T^{'}_{\mu\nu\ldots\lambda} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{'\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{'\nu}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{'\lambda}} T_{\alpha\beta\ldots\sigma} \tag{9}$$

1.3.4 混合张量的定义

$p+q$ 阶混合张量（即有 p 个逆变指标和 q 个协变指标的张量）$T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_q}$ 定义为在坐标变换下按 (10) 式变换的量。

$$T^{'\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_q} = \frac{\partial x^{'\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{'\mu_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \cdot \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x^{'\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial x^{'\nu_q}} T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_q} \tag{10}$$

1.4 仿射空间中的线元

仿射空间中线元 $\mathrm{d}s$ 的定义为

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu} \mathrm{d}x^{\mu} \mathrm{d}x^{\nu} \tag{11}$$

其中，$g_{\mu\nu}$ 称为**度规张量**。线元的含义是空间中相邻两点间的距离。

1.5 度规张量

式 (11) 中的度规张量 $g_{\mu\nu}$ 是协变张量，所以也可以将其称为协变度规张量。我们可以将协变度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 的行列式记为 g。

$$g = \det|g_{\alpha\beta}| \tag{12}$$

将协变度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 的代数余子式记为 $\Delta^{\alpha\beta}$。当 $g \neq 0$ 时，可以定义逆变度规张量 $g^{\alpha\lambda}$ 为

$$g^{\alpha\lambda} = \frac{\Delta^{\alpha\lambda}}{g} \tag{13}$$

显然，它满足

$$g^{\alpha\lambda} g_{\lambda\beta} = \frac{\Delta^{\alpha\lambda}}{g} \cdot g_{\lambda\beta} = \delta^\alpha_\beta \tag{14}$$

其中，克罗内克 δ 符号定义为

$$\delta^\alpha_\beta = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{15}$$

另外，容易推导出，若 $g_{\alpha\beta}$ 为对角矩阵，则 $g^{\alpha\beta} = \frac{1}{g_{\alpha\beta}}$。

可证明度规张量的混合张量形式 g^α_β 满足

$$g^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta \tag{16}$$

1.6 张量指标的升降

张量指标的升降通过与度规张量进行内积来实现，如

$$A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta \quad , \quad A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta \quad , \quad A^\alpha = g^\alpha_\beta A^\beta \tag{17}$$

$$T_{\alpha\beta} = g_{\alpha\lambda} T^\lambda_\beta \quad , \quad T^\alpha_\beta = g^{\alpha\lambda} T_{\lambda\beta} \quad , \quad T^\alpha_\beta = g^\alpha_\lambda T^\lambda_\beta \tag{18}$$

升降多个指标则通过多次与度规张量进行内积来实现，如

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{19}$$

利用度规张量，可定义**坐标微分的协变形式**。

$$\mathrm{d}x_\alpha = g_{\alpha\beta} \mathrm{d}x^\beta \tag{20}$$

因此，线元的表达式可以变形成多种形式。

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta} \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta = g^{\alpha\beta} \mathrm{d}x_\alpha \mathrm{d}x_\beta = g^\alpha_\beta \mathrm{d}x_\alpha \mathrm{d}x^\beta = \mathrm{d}x_\beta \mathrm{d}x^\beta \tag{21}$$

利用度规张量，还可以定义矢量长度的平方。以矢量 A 为例，矢量长度的平方常记为 A^2，则**矢量长度的平方** A^2 定义为

$$A^2 = g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta \tag{22}$$

同样地，矢量长度平方的表达式也可以变形成多种形式。

$$A^2 = g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta = g^{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta = g^\alpha_\beta A_\alpha A^\beta = A_\beta A^\beta \tag{23}$$

2 狭义相对论中的张量知识

上面介绍的张量分析适用于所有应用张量的情况，而以下介绍的内容仅适用于狭义相对论中。

2.1 度规张量

狭义相对论中使用的是闵可夫斯基度规，表达式为

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{cases} +1, & \mu = \nu = 0 \\ -1, & \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases} \tag{24}$$

2.2 时空坐标

狭义相对论中使用的时空坐标为

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{25}$$

利用闵可夫斯基度规对时空坐标的指标进行升降，可推导出

$$x_\mu = (ct, -x, -y, -z) = (x_0, x_1, x_2, x_3) \tag{26}$$

2.3 4-导数（4-梯度）

狭义相对论中对时空坐标的导数是四维的，所以称为 4-导数（即 4-梯度），表达式为

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, +\nabla\right) \tag{27}$$

其中，将 $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right)$ 记为 ∇，即 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$。

利用链式法则 $\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x_\mu}$，可以证明 $\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu$，因此可推导出

$$\begin{aligned} \partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\frac{\partial}{\partial x^1}, -\frac{\partial}{\partial x^2}, -\frac{\partial}{\partial x^3}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla\right) \end{aligned} \tag{28}$$

2.4 4-散度、4-旋度、4-拉普拉斯算符（达朗贝尔算符）

以矢量 A 为例，矢量 A 的 4-散度为

$$\partial_\alpha A^\alpha = \partial^\alpha A_\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \nabla \cdot \boldsymbol{A} \tag{29}$$

矢量 A 的 4-旋度 $C^{\mu\nu}$ 是一个张量，表达式为

$$C^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{30}$$

另外，利用 $C_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} C^{\alpha\beta}$，可以证明 $C_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$。

4-拉普拉斯算符（达朗贝尔算符）为

$$\partial^\alpha \partial_\alpha = \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \nabla^2 \tag{31}$$