双星问题的运动形式的证明

区艺锋

在双星问题中，对两个星体的运动形式有这样的描述：两个星体都以系统的质心为圆心，以不同的半径做圆周运动。

这篇笔记对这个描述进行证明。

对于双星问题，我们假定两个星体仅受彼此之间的万有引力。也就是说，系统不受外力。根据质心运动定理，有

> 结论 1：双星系统的质心相对某惯性系是静止的。

这个结论对证明并无帮助，即使结论 1 不成立也并不影响证明，在此写出只是帮助理解。

由于系统只有两个质点，可以以两质点连线为坐标系的 x 轴建立直角坐标系，容易证明

> 结论 2：系统的质心在两质点连线上。

接下来，我们在质心参考系[1]中观察两个星体的运动。两个星体受到彼此的万有引力做圆周运动，由于万有引力的方向在两星体连线上，所以两个星体做圆周运动的圆心也必然都在两星体连线上。

设：两个星体之间的距离为 l；

星体 1 的质量为 M，坐标为 $(x_M, 0)$，质心参考系中的速度为 $\boldsymbol{v}'_M$，在质心参考系下做圆周运动的半径为 R_M，星体 1 与质心的距离为 d_M；

星体 2 的质量为 m，坐标为 $(x_m, 0)$，质心参考系中的速度为 $\boldsymbol{v}'_m$，在质心参考系下做圆周运动的半径为 R_m，星体 2 与质心的距离为 d_m。

在质心参考系中，质心速度为零，则

$$\begin{aligned} M\boldsymbol{v}'_M + m\boldsymbol{v}'_m &= 0 \qquad (1) \\ Mv'_M &= mv'_m \qquad (2) \end{aligned}$$

由 (2) 式得

$$\frac{v'_M}{v'_m} = \frac{m}{M} \tag{3}$$

[1]如果结论 1 成立，那么在质心参考系中观察与在惯性系中观察无异。

两星体彼此间的万有引力提供向心力，则

$$G\frac{Mm}{l^2}=M\frac{v_M'^2}{R_M} \tag{4}$$

$$G\frac{Mm}{l^2}=m\frac{v_m'^2}{R_m} \tag{5}$$

由 (4)(5) 式得

$$\begin{aligned}\frac{R_M}{R_m} &= \frac{v_M'^2}{v_m'^2}\frac{M}{m} && (6)\\ &= \frac{m}{M} && (7)\end{aligned}$$

下面来计算 d_M 和 d_m。首先，质心的 x 坐标为

$$x_c=\frac{Mx_M+mx_m}{M+m} \tag{8}$$

则

$$\begin{aligned}d_M &= |x_c-x_M| && (9)\\ &= \frac{m}{M+m}|x_M-x_m| && (10)\\ d_m &= |x_c-x_m| && (11)\\ &= \frac{M}{M+m}|x_M-x_m| && (12)\end{aligned}$$

由 (10)(12) 式得

$$\frac{d_M}{d_m}=\frac{m}{M} \tag{13}$$

显然地

$$R_M+R_m=l \tag{14}$$

$$d_M+d_m=l \tag{15}$$

联立 (7)(13)(14)(15) 式得

$$R_M=d_M \tag{16}$$

$$R_m=d_m \tag{17}$$

星体做圆周运动的半径等于星体与质心的距离，这也就是说星体做圆周运动的圆心即为质心。并且，两个星体都是如此。

这样，就完成了对双星问题运动形式的证明。

在此之后，有一个小结论也可以随之得到。设星体 1 在质心参考系下做圆周运动的角速度为 $\omega_M^{'}$，星体 2 在质心参考系下做圆周运动的角速度为 $\omega_m^{'}$

$$\omega_M^{'}=\frac{v_M^{'}}{R_M} \tag{18}$$

$$\omega_m^{'}=\frac{v_m^{'}}{R_m} \tag{19}$$

由 (3)(7) 式得

$$\begin{aligned}\frac{\omega_M'}{\omega_m'} &= \frac{v_M' R_m}{v_m' R_M} && (20)\\ &= 1 && (21)\end{aligned}$$

即 $\omega_M' = \omega_m'$，两个星体绕质心做圆周运动的角速度相等。