

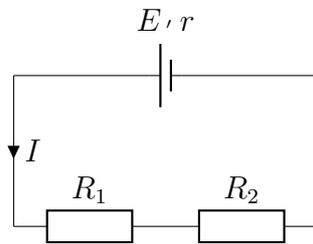
# 串并联电路的动态分析

区艺锋

本篇笔记中将计算两电阻的串联或并联电路中，由于其中一个电阻的阻值变化，所带来的各个电压、电流与功率变化规律。首先对下面会出现的符号进行说明：

- $E$  为电源电动势， $r$  为电源内阻。
- $R$  为外电路的总电阻， $R_1$  为电阻 1 的阻值， $R_2$  为电阻 2 的阻值。
- $U$  为路端电压， $U_1$  为电阻 1 两端的电压， $U_2$  为电阻 2 两端的电压。
- $I$  为电路的总电流， $I_1$  为通过电阻 1 的电流， $I_2$  为通过电阻 2 的电流。
- $P$  为外电路的总电功率， $P_1$  为电阻 1 的电功率， $P_2$  为电阻 2 的电功率。

## 1 串联电路



### 1.1 总电阻变化

当  $R_1$  增大时， $R = R_1 + R_2$  增大。

### 1.2 电压、电流变化

当  $R_1$  增大时，各电压、电流会发生以下变化：

- |  |  |
|--|--|
| 1. $I = \frac{E}{R+r}$ ，由于 $R$ 增大，所以减小 | 4. $U_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2+r}E$ 减小                                 |
| 2. $U = E - Ir$ ，由于 $I$ 减小，所以增大        | 5. $I_1 = I$ 减小  |
| 3. $I_2 = I$ 减小                        | 6. $U_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2+r}E = \frac{1}{1+\frac{R_2+r}{R_1}}$ 增大 |

### 1.3 功率变化

#### 1.3.1 总功率

$$P = UI \quad (1)$$

$$= \frac{ER}{R+r} \cdot \frac{E}{R+r} \quad (2)$$

$$= \frac{E^2 R}{R^2 + r^2 + 2Rr} \quad (3)$$

$$= \frac{E^2}{R + \frac{r^2}{R} + 2r} \leq \frac{E^2}{4r} \quad (4)$$

根据基本不等式  $a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{ab}$ , 当  $a = b$  时取等号, 其中  $a, b$  为正数。则  $R + \frac{r^2}{R} \geq 2r$ ,  $R + \frac{r^2}{R}$  在  $R = r$  时取得最小值。所以  $P = \frac{E^2}{R + \frac{r^2}{R} + 2r}$  在  $R = r$  时取得最大值  $\frac{E^2}{4r}$ ; 且  $R$  越远离  $r$  (无论是比  $r$  大还是比  $r$  小),  $P$  越小。

#### 1.3.2 电阻 1 功率

$$P_1 = U_1 I_1 \quad (5)$$

$$= \frac{ER_1}{R_1 + R_2 + r} \cdot \frac{E}{R_1 + R_2 + r} \quad (6)$$

$$= \frac{E^2 R_1}{R_1^2 + (R_2 + r)^2 + 2(R_2 + r)R_1} \quad (7)$$

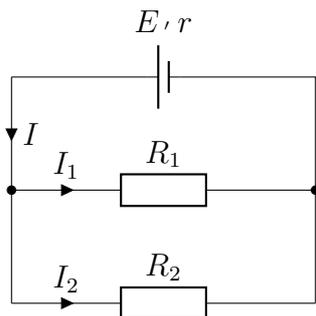
$$= \frac{E^2}{R_1 + \frac{(R_2 + r)^2}{R_1} + 2(R_2 + r)} \leq \frac{E^2}{4(R_2 + r)} \quad (8)$$

根据基本不等式,  $P_1$  在  $R_1 = R_2 + r$  时取得最大值  $\frac{E^2}{4(R_2 + r)}$ ; 且  $R_1$  越远离  $R_2 + r$  (无论是比  $R_2 + r$  大还是比  $R_2 + r$  小),  $P$  越小。

#### 1.3.3 电阻 2 功率

由于当  $R_1$  增大时,  $U_2, I_2$  都减小, 所以  $P_2 = U_2 I_2$  减小。

## 2 并联电路



## 2.1 总电阻变化

并联电路中  $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ , 由于  $\frac{dR}{dR_1} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)^2 > 0$ , 所以当  $R_1$  增大时,  $R$  增大。

## 2.2 电压、电流变化

当  $R_1$  增大时, 各电压、电流会发生以下变化:

- |  |  |
|--|--|
| 1. $I = \frac{E}{R+r}$ , 由于 $R$ 增大, 所以减小 | 4. $I_2 = \frac{U_2}{R_2}$ , 由于 $U_2$ 增大, 所以增大 |
| 2. $U = E - Ir$ , 由于 $I$ 减小, 所以增大        | 5. $U_1 = U$ 增大                                |
| 3. $U_2 = U$ 增大                          | 6. $I_1 = I - I_2$ , 由于 $I$ 减小, $I_2$ 增大, 所以减小 |

## 2.3 功率变化

### 2.3.1 总功率

与串联电路中总功率的推导相同。

$$P = UI \quad (9)$$

$$= \frac{ER}{R+r} \cdot \frac{E}{R+r} \quad (10)$$

$$= \frac{E^2 R}{R^2 + r^2 + 2Rr} \quad (11)$$

$$= \frac{E^2}{R + \frac{r^2}{R} + 2r} \leq \frac{E^2}{4r} \quad (12)$$

根据基本不等式,  $P$  在  $R = r$  时取得最大值  $\frac{E^2}{4r}$ ; 且  $R$  越远离  $r$  (无论是比  $r$  大还是比  $r$  小),  $P$  越小。

### 2.3.2 电阻 1 功率

$$P_1 = U_1 I_1 \quad (13)$$

$$= U_1 \frac{U_1}{R} = \frac{(E - Ir)^2}{R_1} = \frac{1}{R_1} \left( E - \frac{Er}{\frac{1}{R_1 + \frac{1}{R_2}} + r} \right)^2 = \frac{E^2}{R_1} \left( \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} + r} \right)^2 \quad (14)$$

$$= \frac{E^2}{R_1} \left( \frac{1}{1 + r(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})} \right)^2 \quad (15)$$

$$= \frac{E^2}{R_1} \frac{1}{\frac{r^2}{R_1^2} + (\frac{r}{R_2} + 1)^2 + 2(\frac{r}{R_2} + 1)\frac{r}{R_1}} \quad (16)$$

$$= \frac{E^2}{\frac{r^2}{R_1} + (\frac{r}{R_2} + 1)^2 R_1 + 2(\frac{r}{R_2} + 1)r} \leq \frac{E^2}{4r(\frac{r}{R_2} + 1)} \quad (17)$$

根据基本不等式,  $P_1$  在  $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r}$  (即  $R_1 = \frac{R_2 r}{R_2 + r}$ ) 时取得最大值  $\frac{E^2}{4r(\frac{r}{R_2} + 1)}$ ; 且  $R_1$  越远离  $\frac{R_2 r}{R_2 + r}$  (无论是比  $\frac{R_2 r}{R_2 + r}$  大还是比  $\frac{R_2 r}{R_2 + r}$  小),  $P$  越小。

### 2.3.3 电阻 2 功率

由于当  $R_1$  增大时,  $U_2, I_2$  都增大, 所以  $P_2 = U_2 I_2$  增大。

## 3 总结

此处简单总结上面所推导的全部结果, 当  $R_1$  增大时, 各电压、电流、功率会发生以下变化:

#### 串联电路

- $U$  增大,  $I$  减小,  $P$  在  $R = r$  时有最大值
- $U_1$  增大,  $I_1$  减小,  $P_1$  在  $R_1 = R_2 + r$  时有最大值
- $U_2$  减小,  $I_2$  减小,  $P_2$  减小

#### 并联电路

- $U$  增大,  $I$  减小,  $P$  在  $R = r$  时有最大值
- $U_1$  增大,  $I_1$  减小,  $P_1$  在  $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r}$  时有最大值
- $U_2$  增大,  $I_2$  增大,  $P_2$  增大

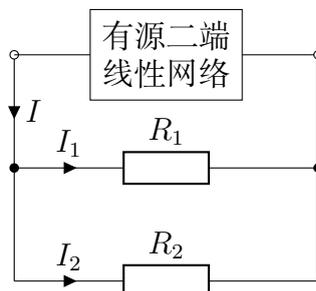
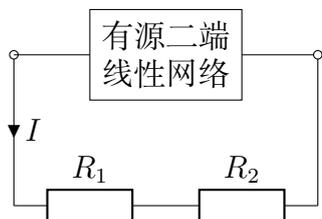
总结起来, 可以有下面这些结论:

1. 当  $R_1$  增大时, 无论在串联电路还是并联电路中,  $U$  都增大、 $I$  都减小、 $P$  都有最大值。
2. 当  $R_1$  增大时, 无论在串联电路还是并联电路中,  $U_1$  都增大、 $I_1$  都减小、 $P_1$  都有最大值。
3. 当  $R_1$  增大时, 在串联电路中,  $U_2, I_2, P_2$  都减小; 在并联电路中,  $U_2, I_2, P_2$  都增大。

结论 3 即所谓“串反并同”, 在此篇笔记中对这个结论进行了严格地证明, 在以后的问题中可以直接应用这个结论。

## 4 拓展

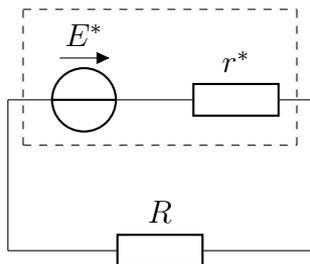
### 4.1 “总结”部分 3 条结论适用范围的拓展



在“3 总结”部分中，总结了 3 条结论，这 3 条结论的适用范围是在直接与有内阻的一个电源相连的串联电路和并联电路中（电路图在“1 串联电路”、“2 并联电路”两节）。根据戴维宁定理，任一有源二端线性网络都可以用一电压源与一电阻串联等效替代（即有内阻的一个电源），所以这 3 条结论的适用范围可以拓展到与任一有源二端线性网络相连的串联电路和并联电路中，电路图为上图。

在高中电路问题中，绝大部分电路中出现的元件全是电阻（或被视作定值电阻的小灯泡），所以高中出现的绝大部分电路都是线性网络，也就是说这 3 条结论在高中绝大部分电路中都适用。同时，这也是“串反并同”结论的严格证明，大可放心使用。

#### 4.2 (1)-(4) 式总功率计算的拓展



从 (1) 式到 (4) 式，计算了总电阻为  $R$  的外电路，在与有内阻的一个电源相连的情况下的外电路总功率。利用戴维宁定理，可以对这个情境进行拓展。

根据戴维宁定理，任一有源二端线性网络都可以用一电压源与一电阻串联等效替代（即有内阻的一个电源）。如果我任意选取一个阻值在变化的电阻  $R$ ，想要计算  $R$  上消耗的电功率。那么就可以将除  $R$  外的电路其他部分用戴维宁定理等效，形成上图的电路，图中虚线框的部分即用戴维宁定理等效出来的电压源和电阻。用戴维宁等效电动势  $E^*$  和戴维宁等效内阻  $r^*$  重复从 (1) 式到 (4) 式的计算，就可以计算出电阻  $R$  上消耗的电功率。

事实上，这种方法可以用来计算 (8) 式和 (17) 式的结果，计算出来的结果与 (8) 式和 (17) 式相同。